

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΤΕΛΙΚΟ
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΣΟΡΩΝΗΣ
ΤΑΞΗ Γ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 4 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2016

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να δείξετε ότι: $f'(x_0)=0$.

Μονάδες 15

A2. Πότε η ευθεία $y=l$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 2

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα, στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Υπάρχει συνάρτηση f για την οποία ισχύουν συγχρόνως οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano και Rolle στο $[a, \beta]$. Σ Λ

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$ Σ Λ

γ) Το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^{1998} - x + 2016}$, είναι καλά ορισμένο. Σ Λ

δ) Μία συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathcal{R}$ είναι συνάρτηση 1-1 αν και μόνο αν για οποιαδήποτε x_1, x_2 ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1=x_2$ τότε $f(x_1)=f(x_2)$ Σ Λ

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:
 $f^3(x) + f(x) + 0,5x = 0$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

B1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 10

B2. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την ευθεία $x = -4$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Γ

Έστω συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 4)$ για την οποία ισχύουν:

$$e^{f(x)} = 3f'(x) \cdot f''(x) \quad (1) \text{ για κάθε } x < 4,$$

$$f'(x) \neq 0 \quad (2) \text{ για κάθε } x < 4,$$

$$f(1) = 0 \quad (3) \text{ και}$$

$$f'(1) = 1 \quad (4).$$

Γ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 4)$ και να βρείτε τα πρόσημα της f .

Μονάδες 6

Γ2. Να δείξετε ότι $\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{1}{3}$ και κατόπιν ότι η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 4)$.

Μονάδες 7

Γ3. Να δείξετε ότι $f'(x) = \frac{3}{4-x}$ $x < 4$ και στην συνέχεια να δείξετε

ότι $f(x) = 3 \ln\left(\frac{3}{4-x}\right)$ $x < 4$.

Μονάδες 8

Γ4. Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της f .

Μονάδες 2

Γ5. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2016$ έχει μοναδική λύση στο $(-\infty, 4)$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} για την οποία ισχύει:

$$f(x+1) = f(x) + 3 \cdot x \quad (1) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} .$$

Δ1. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ ώστε $f'(\xi) = 0$.

Μονάδες 5

Δ2. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ ώστε $f''(x_0) = 3$.

Μονάδες 6

Δ3. Για το ξ του ερωτήματος Δ1 να δείξετε ότι

$$\int_{\xi}^{\xi+1} x \cdot f''(x) dx = 3 .$$

Μονάδες 8

Δ4. Αν επιπλέον ισχύει $\int_0^2 f(x) dx = 2$, τότε να υπολογίσετε το

ολοκλήρωμα: $I = \int_0^1 f(x) dx$.

Μονάδες 6

Καλή Επιτυχία !!!

Ο ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ

Χατζηανδρέου Νίκος